

(MAT3SK)

(2110-3K)

B.A. /B.Sc. DEGREE EXAMINATION, FEBRUARY 2023.

(Regular)

Second Year — Third Semester

Part II — Mathematics

Paper III — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Write down the composition table for $G = \{1, -1, i, -i\}$ with respect to multiplication.
గుణకారము దృష్ట్యా $G = \{1, -1, i, -i\}$ కు పరిక్రమ్య పట్టికను వ్రాయండి.
2. Prove that the cancellation laws hold in a group.
ఒక సమూహములో కొట్టివేత న్యాయాలు ఉంటాయని చూపుము.
3. Find the cosets of $3Z$ in $(Z, +)$.
 $(Z, +)$ లో $3Z$ యొక్క సహ సమితులను కనుగొనుము.
4. If G is a group and $a \in G$ then prove that $N(a) = \{x \in G : ax = xa\}$ is a subgroup of G .
 G ఒక సమూహము మరియు $a \in G$ అయిన G కు $N(a) = \{x \in G : ax = xa\}$ ఒక ఉపసమూహము అవుతుందని చూపుము.
5. If $f : G \rightarrow G'$ is a homomorphism then prove that $\ker f$ is a normal subgroup of G .
 $f : G \rightarrow G'$ ఒక సమరూపత అయిన G కు $\ker f$ ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము అని నిరూపించుము.
6. If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ then find fg and gf .
 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ అయిన fg మరియు gf లను కనుగొనుము.
7. Prove that a field has no zero divisors.
ఒక క్షేత్రమునకు శూన్య భాజకాలు ఉండవని నిరూపించుము.
8. Prove that the intersection of two subrings of a ring R is a subring of R .
వలయము R యొక్క రెండు ఉపవలయాల ఛేదనము R కు ఉపవలయము అవుతుందని నిరూపించుము.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL questions.

9. (a) If G is a group and $a, b \in G$ then prove that the equations $ax = b$ and $ya = b$ have a unique solution.

G ఒక సమూహము మరియు $a, b \in G$ అయిన $ax = b$ మరియు $ya = b$ సమీకరణాలకు ఏకైక సాధన ఉండునని చూపుము.

Or

- (b) Show that n^{th} roots of unity form an abelian group under multiplication.

1 యొక్క n వ మూలాల సమితి గుణకార పరిక్రియ దృష్ట్యా ఒక వినిమయ సమూహము అవుతుందని నిరూపించుము.

10. (a) State and prove Lagrange's theorem.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి, నిరూపించుము.

Or

- (b) Prove that a finite non empty complex H of a group G is a subgroup of G iff $ab \in H \forall a, b \in H$.

సమూహము G కు H ఒక శూన్యేతర సమితి, ఉపసమితి కావాలంటే, ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $ab \in H \forall a, b \in H$ తో నిరూపించుము.

11. (a) State and prove fundamental theorem of Homomorphism on groups.

సమూహాలపై సమరూపతా మూల సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

Or

- (b) Prove that a subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if every left coset of H in G is a right coset of H in G .

G అనే సమూహములోని ఉపసమూహము H అభిలంబ ఉపసమూహము అవడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము G లోని H యొక్క ప్రతి ఎడమ సహసమితి G లోని H యొక్క కుడి సహసమితి అని నిరూపించుము.

12. (a) State and prove Cayley's theorem.

కాలీ సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

Or

- (b) Find the generators of the cyclic group $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X_7)$

$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, X_7)$ అను చక్రియ సమూహమునకు జనక మూలకాలు కనుగొనుము.

13. (a) Define Boolean ring. If R is a Boolean ring then prove that

(i) $a + a = 0 \quad \forall a \in R$

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

(iii) R is commutative under multiplication.

బూలియన్ వలయమును నిర్వచింపుము. బూలియన్ వలయము R లో

(i) $a + a = 0 \quad \forall a \in R$

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

(iii) గుణకారము దృష్ట్యా R వినిమయము అని నిరూపించుము.

Or

(b) Prove that the characteristic of an integral domain is either a prime or zero.

ఒక పూర్ణాంక ప్రదేశం యొక్క లాక్షణికము సున్నా లేదా అభాజ్య సంఖ్య అగునని నిరూపించుము.